DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM VII

ADAM BIELECKI

O INTEGRALNEM PRZEDSTAWIANIU m-WYMIAROWYCH POWIERZCHNI ZAWARTYCH W n-WYMIAROWEJ PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ ZAPOMOCĄ FUNKCYJ UWIKŁANYCH

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1935
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928, Tom V za rok 1931 i Tom VI za rok 1934.

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM VII

ADAM BIELECKI

O INTEGRALNEM PRZEDSTAWIANIU m-WYMIAROWYCH POWIERZCHNI ZAWARTYCH W n-WYMIAROWEJ PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ ZAPOMOCĄ FUNKCYJ UWIKŁANYCH

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1935
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928, Tom V za rok 1931 i Tom VI za rok 1934.



Adam Bielecki

O integralnem przedstawianiu m-wymiarowych powierzchni zawartych w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, zapomocą fukcyj uwikłanych.

Wstęp.

Zagadnienie, którego rozwiązaniem zajmę się w tej pracy, było postawione przez p. profesora Witolda Wilkosza jeszcze w r. 1924, na „Seminarjum dla starszych", poświęconem zagadnieniom topologiczno-metrycznym w związku z teorją krzywych i powierzchni.

O zagadnieniu tem dowiedziałem się znacznie później, bo w r. 1930, od p. profesora Tadeusza Ważewskiego, od niego też pochodzi to sformułowanie problemu, które stanowi punkt wyjścia badań rozdziału II.

Problem streszcza się w najprostszym wypadku do takiego oto pytania: Czy krzywa płaska, dana zapomocą równań parametrycznych:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t), \end{aligned}$$

może być przedstawiona równaniem:

$$(2)\qquad F(x, y) = 0\,?$$

O krzywej założymy, że spełnia klasyczne warunki regularności: pochodne rzędu $p (p \geqslant 1)$ funkcyj (1) są ciągłe a pochodne pierwsze spełniają nierówność

$$(3)\qquad \left|\frac{df}{dt}\right| + \left|\frac{dg}{dt}\right| \neq 0 \qquad \text{w pewnym przedziale.}$$

Żądamy, by funkcja $F(x, y)$ posiadała pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p' włącznie (o ile możności $p' = p$) w pewnym obszarze, obejmującym krzywą (1), i aby tamże zachodziła nierówność

$$(4)\qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \neq 0.$$

Jeżeli sformułujemy analogiczne pytania dla powierzchni lub dla krzywych skośnych, zanurzonych w przestrzeni 3- i więcej wymiarowej euklidesowej, to otrzymamy zagadnienie w całej jego rozciągłości.

Powróćmy narazie do krzywych płaskich. Nasuwa się tu, w sposób naturalny, pomysł posłużenia się następującą metodą: W każdym punkcie krzywej (1) można określić wektor normalny $\bar{a}(t)$, którego składowe $\alpha(t)$, $\beta(t)$ są funkcjami ciągłemi zmiennej t. Jeśliby układ funkcyj

$$x = f(t) + \alpha(t)u \qquad (5)$$
$$y = g(t) + \beta(t)u$$

mógł być odwrócony, to funkcja $u(x, y)$, jedna z odwrotnych, byłaby rozwiązaniem. Lokalnie udaje się to, na mocy klasycznego twierdzenia o inwersji układu funkcyj, gdy tylko funkcje (1) posiadają ciągłe pochodne rzędu drugiego. Funkcja $F(x, y) = u(x, y)$ jest wtedy określona w otoczeniu jednego z punktów krzywej (1), p' wynosi $p - 1$ [1]).

Metoda powyższa zawodzi w wypadku $p = 1$. Jeżeli przyjmiemy $f(t) = t$, $g(t) = |t|^{3/2}$, to układ (5) nie będzie odwracalny w żadnem otoczeniu punktu $t = 0$, $u = 0$.

O krok dalej posuniemy się, biorąc za $\bar{a}(t)$, w miejsce wektora normalnego, inny wektor, dostatecznie bliski, o przebiegu bardziej regularnym, posługując się w tym celu np. znanem twierdzeniem

---

[1]) Warto tu zacytować twierdzenie p. doc. St. Gołąba, które pozostaje w związku z zagadnieniami, rozważanemi na wzmiankowanem „Seminarjum dla starszych" p. prof. W. Wilkosza.

Niech będzie dana krzywa C, określona zapomocą równań

$$x = f(t), \ y = g(t),$$

przyczem funkcje $f(t)$, $g(t)$ są funkcjami rzeczywistemi, o ciągłych drugich pochodnych wewnątrz przedziału (a, b), gdzie $a < b$, nadto pierwsze pochodne czynią stale zadość nierówności:

$$[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \neq 0.$$

Niech będzie:

$$a < t_0 < b.$$

Oznaczamy przez $K(\varrho)$ koło o środku w punkcie $M_0\,[f(t_0),\ g(t_0)]$, a którego promień wynosi ϱ ($\varrho > 0$). Jeżeli α jest dowolną liczbą, byle większą od jedności, wówczas przy dostatecznie małych wartościach liczby ϱ każdy punkt (ξ, η) pola kolistycznego $K(\varrho)$ leży na jednej i tylko jednej normalnej krzywej C, której spodek leży na polu koła $K(\alpha\varrho)$. (Prace Akad. Górn. w Krakowie, zeszyt 4, 1924).

Weierstrassa o przybliżaniu funkcyj ciągłych wielomianami. Będzie tu $p' = p \geqslant 1$. Rozwiązanie jest jednak dalej tylko lokalne[1]).

Szukając rozwiązania integralnego, mamy do wyboru dwie drogi: Albo zajmiemy się łukami prostemi[2]), do których zaliczymy końce, co powoduje niedogodności w wysłowieniu twierdzeń, albo łukami prostemi bez końców, które ponadto nie będą mogły zagęszczać się na sobie samych.

Pierwsza postać zagadnienia[3]) może być sprowadzoną do pewnego twierdzenia O. Bolzy o inwersji układów funkcyj: Mathematische Annalen Bd. 63 (1906), p. 247; także O. Bolza: Vorlesungen über Varationsrechnung, rok wyd. 1908, rozdział IV.

Do podjęcia drugiego kierunku (rozdział II) zachęcił mnie p. profesor Ważewski. Tu jednak ani twierdzenie Weierstrassa ani twierdzenie Bolzy nie mogło być zastosowane i powstała konieczność postawienia i udowodnienia nowych twierdzeń bardziej elastycznych. (Twierdzenia II i VI rozdziału I).

To co było powiedziane o łukach na płaszczyźnie, może być przeniesione do rozważań o łukach i hiperpowierzchniach w przestrzeniach euklidesowych wielowymiarowych. Nową trudność, która przy tem powstaje, usuwa twierdzenie III rozdziału I, udowodnione przez p. prof. Tadeusza Ważewskiego.

W rozdziale II rozważam m-wymiarowe płaty powierzchniowe, będące homeomorfjami m-wymiarowych dziedzin euklidesowych. W rozdziale III wychodzę z szerszej definicji powierzchni (rozdz. III

---

[1]) Dostajemy tu lokalnie rodzinę trajektoryj krzywej (1), kładąc $t(x, y) =$ const. Funkcja $t(x, y)$ posiada pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p włącznie i zachodzi:

$$\left|\frac{\partial t}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial t}{\partial y}\right| \neq 0$$

w otoczeniu pewnego punktu (x^0, y^0) krzywej (1). Możnaby powiedzieć, że „rząd regularności rodziny trajektoryj jest ten sam co rząd regularności krzywej". Poszukiwanie rodziny trajektoryj (niekoniecznie ortogonalnych) dla danej krzywej z zachowaniem „rzędu regularności" było jednem z zagadnień, wysuniętych przez p. prof. W. Wilkosza, na dwukrotnie już wspomnianem seminarjum.

[2]) W punktach wielokrotnych krzywej (1) nie mogłaby się utrzymać nierówność (4).

[3]) Zajmowałem się nią w pracy magisterskiej, także odnośnie do płatów powierzchniowych. Miałem na ten temat referat na zebraniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego 6 XII 1930 r. Zob. Ann. de la Société Polonaise de Math. t. IX, str. 207.

l. 1), przez co jednak, odnośnie do powierzchni, zanurzonych w przestrzeniach więcej niż 3-wymiarowych, otrzymuję rezultaty mniej kompletne.

W omawianej dotychczas części pracy, funkcje uwikłane, przedstawiające zadaną powierzchnię, są określone w pewnej dziedzinie, obejmującej powierzchnię. Rozdział III zawiera również parę twierdzeń, dotyczących zagadnienia, czy można daną powierzchnię m-wymiarową, zawartą w przestrzeni $(m+1)$-wymiarowej, przedstawić równaniem $F(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) = 0$ tak, aby funkcja F była określona i spełniała pewne warunki regularności w obszarze *zgóry* zadanym. M. in. znajduje się tam odwrócenie pewnego twierdzenia (l. 37) p. prof. W. Wilkosza. W rozdziale I zebrałem twierdzenia pomocnicze.

Twierdzenie VII zostało przezemnie zreferowane na posiedzeniu Pol. Tow. Mat. dnia 9 V 1931 [1]). O szczególnym przypadku twierdzenia X, odnoszącym się do zamkniętych krzywych i powierzchni jordanowskich, mówiłem w referacie p. t. „Pewne twierdzenie z teorji powierzchni", na 9-ym zjeździe ogóln. Związku Kół matematycznych, fizycznych i astronomicznych polskiej młodzieży akademickiej, we Lwowie 25 V 1931.

Na zakończenie niech mi będzie wolno wyrazić najżywszą wdzięczność PP. Profesorom Witoldowi Wilkoszowi i Tadeuszowi Ważewskiemu za życzliwe i cenne wskazania, jakich mi wielokrotnie, w związku z tą pracą udzielali.

Rozdział I.

1. Będziemy używać następujących oznaczeń i skrótów: Punkt przestrzeni euklidesowej o współrzędnych $x_1, x_2, \dots x_n$ będziemy, o ile nie zachodzi obawa nieporozumienia, oznaczać w skróceniu pojedynczą literą x bez wskaźnika na dole; analogicznie ξ zamiast $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, y^0 zamiast $(y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0)$. Wskaźniki, odróżniające poszczególne punkty, będą umieszczane u góry.

Jeżeli ε oznacza liczbę dodatnią, to $o(x_1, x_2, \dots x_n; \varepsilon)$ lub krócej $o(x; \varepsilon)$ będzie oznaczać zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej, których odległość od punktu x jest mniejsza niż ε (zbiór otwarty); $o[x_1, x_2, \dots x_n; \varepsilon]$ lub $o[x; \varepsilon]$ będzie symbolem zbioru punktów, których odległość od punktu x nie przekracza ε (zbiór domknięty).

---

[1]) Ann. de la Société Polonaise de Math. t. X, str. 131.

Jeżeli A oznacza zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej, ε liczbę dodatnią, to symbol $o(A, \varepsilon)$ oznacza zbiór punktów n-wymiarowych, których odległość od zbioru A jest mniejsza niż ε; $o[A, \varepsilon]$ zbiór punktów, których odległość od A nie przekracza ε.

Przez dziedzinę będziemy rozumieć zawsze zbiór otwarty spójny. Funkcję $f(x)$, posiadającą w dziedzinie D pochodne cząstkowe ciągłe do rzędu p włącznie, $p \geqslant 1$, będziemy nazywać funkcją „klasy C^p w dziedzinie D", funkcję zaś, posiadającą w D pochodne cząstkowe wszystkich rzędów — „fizykalną w D".

2. **Twierdzenie I.**[1]) *Jeżeli O jest otwartym zbiorem punktów przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, B otwartym podzbiorem O, A podzbiorem B, domkniętym względem O, to istnieje funkcja $\vartheta(x)$ ciągła, posiadająca pochodne cząstkowe wszystkich rzędów ciągłe w zbiorze O i spełniająca związki:*

$$\begin{array}{ll} \vartheta(x) = 0 & \text{w } A, \\ \vartheta(x) = 1 & \text{w } O - B\,^{2)}, \\ 0 \leqslant \vartheta(x) \leqslant 1 & \text{w } B - A, \end{array}$$

dowolne pochodne cząstkowe funkcji $\vartheta(x)$, dowolnego rzędu zerują się w zbiorze A i w zbiorze $O - B$.

3. **Dowód.** Niech $A_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ oznacza zbiór punktów, należących do A, których odległość od początku układu spółrzędnych nie przekracza ν i których odległość ϱ od brzegu zbioru B spełnia nierówność

$$\varrho \geqslant \frac{1}{\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

4. Zbiory A_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, są domknięte i ograniczone. Zachodzi:

$$A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\ ^{3)}.$$

5. Zbiór A_ν może być, na mocy twierdzenia Heine-Borela, pokryty skończoną ilością n-wymiarowych kul otwartych $K_{\nu, \pi}$,

---

[1]) Jest to uogólnienie lematu, znajdującego się w mojej nocie p. t. „Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass", Ann. de la Soc. Polonaise de Math. t. X, 1931, str. 34. Niezależnie odemnie wypowiedział to twierdzenie p. Kamke, w związku z badaniami na temat równania różniczkowego cząstkowego linjowego jednorodnego (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 44, 1934, 5—8) i podał w liście do p. Wilkosza (r. 1932) dowód całkowicie od mojego różny.

[2]) $O - B$ oznacza zbiór tych elementów zbioru O, które nie należą do B.

[3]) Symbol $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ oznacza sumę ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$.

$\pi = 1, 2, \ldots p_\nu$, zatoczonych promieniem $\frac{1}{2\nu}$, o środkach należących do A_ν. Wobec 3, 4 będzie:

$$A \subset \sum_{\nu, \pi} K_{\nu, \pi} \subset B.$$

6. Oznaczmy przez $K'_{\nu, \pi}$ n-wymiarową kulę otwartą, współśrodkową z $K_{\nu, \pi}$, o promieniu podwojonym, równym $\frac{1}{\nu}$. Ze względu na 3, 4 będzie:

$$A \subset \sum_{\nu, \pi} K'_{\nu, \pi} \subset B.$$

7. Weźmy pod uwagę dowolny punkt x zbioru O. Jeśli dowolne otoczenie punktu x posiada punkty wspólne z nieskończoną ilością kul $K'_{\nu, \pi}$, to x należy do A. Aby się o tem przekonać, zauważmy, że wówczas istnieją, w dowolnie małej odległości od punktu x, kule o dowolnie małych promieniach, których środki należą do A (5, 6); temsamem x jest punktem skupienia zbioru A. Ale skoro, w myśl założenia, A jest domknięte względem O, to x, jako punkt zbioru O, musi do A należeć.

Każdemu zatem punktowi x zbioru $O - A$ odpowiada otoczenie, mające punkty wspólne z najwyżej skończoną liczbą kul $K'_{\nu, \pi}$.

8. Niechaj $\vartheta_{\nu, \pi}(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, \pi = 1, 2, \ldots p_\nu)$ oznacza funkcję ciągłą i posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów w całej przestrzeni n-wymiarowej, spełniającą związki:

$$\begin{array}{ll} \vartheta_{\nu, \pi}(x) = 0 & \text{w } K_{\nu, \pi}, \\ \vartheta_{\nu, \pi}(x) = 1 & \text{poza } K'_{\nu, \pi}, \\ 0 \leqslant \vartheta_{\nu, \pi}(x) \leqslant 1 & \text{w } K'_{\nu, \pi} - K_{\nu, \pi} \end{array}$$ [1]).

9. Przyjmijmy dla punktów zbioru O:

$$\vartheta(x) = \prod_{\substack{\nu = 1, 2, \ldots \\ \pi = 1, 2, \ldots p_\nu}} \vartheta_{\nu, \pi}(x).$$

Jeżeli punkt x należy do A, to jeden z czynników tego iloczynu zeruje się w całem otoczeniu x (5, 8).

Gdy x należy do $O - A$, to w pewnem otoczeniu x najwyżej skończona ilość czynników nie jest równa stałej 1 (7, 8).

---

[1]) W cytowanej nocie podałem metodę budowania takich funkcyj.

W obu wypadkach istnieje otoczenie punktu x, w którem iloczyn powyższy redukuje się do iloczynu skończonego i reprezentuje funkcję ciągłą, posiadającą pochodne cząstkowe ciągłe wszystkich rzędów.

Opierając się na związkach 5—9 stwierdzamy, że $\vartheta(x)$ czyni zadość warunkom, figurującym w wypowiedzi twierdzenia.

10. **Twierdzenie II.** *Jeżeli E jest zbiorem otwartym punktów przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, A niepustym podzbiorem E, domkniętym względem E, Φ i η funkcjami ciągłemi w zbiorze A i jeżeli*

$$\eta > 0 \qquad w\ A,$$

to istnieje funkcja F posiadająca pochodne cząstkowe wszystkich rzędów ciągłe w zbiorze E i spełniająca w zbiorze A nierówność:

$$|F - \Phi| \leqslant \eta.$$

Dowód znajduje się w mojej nocie cytowanej na str. 5.

P. prof. T. Ważewski udowodnił[1]) następujące:

11. **Twierdzenie III.** *Jeżeli w układzie równań linjowych*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p)\, x_\nu = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots m;\ m < n)$$

współczynniki $a_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p)$ są funkcjami ciągłemi w dziedzinie Σ przestrzeni euklidesowej p-wymiarowej; rząd macierzy

$$\left\| a_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p) \right\|_{\substack{\mu=1,2\ldots m \\ \nu=1,2\ldots n}}$$

wynosi m w każdym punkcie dziedziny Σ; i jeżeli w wypadku, gdy równocześnie $p > 2$ i $(n\text{-}m) > 1$, założymy, że Σ jest dziedziną jednospójną i acykliczną (homeomorfją kuli p-wymiarowej); to dany układ równań posiada n-m rozwiązań niezależnych $x_\nu^{(\lambda)}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p)$, $\nu = 1, 2 \ldots n$, $\lambda = 1, 2 \ldots (n\text{-}m)$, ciągłych w każdym punkcie dziedziny Σ.

---

[1]) P. prof. Ważewski wypowiedział to twierdzenie w całej rozciągłości na posiedz. Pol. Tow. Mat. w Krakowie dnia 2 V 1931, w odczycie p. t. O równaniach linjowych o spółczynnikach ciągłych, przyczem zreferował dowód dla wypadku, gdy Σ jest homeomorfją hiperkuli (zob. Ann. de la Soc. Pol. de Math. t. X, str. 131). Dowód ten ukazał się w Compositio Mathematica 1935, II, 1, str. 63. Dowód dla $p = 2$ i dziedziny Σ dowolnej, pominięty na wzmiankowym odczycie w r. 1931, został zreferowany oddzielnie na posiedz. Pol. Tow. Mat. w Krakowie dnia 22 V 1935.

P. prof. Ważewski pokazał na prostym przykładzie, że twierdzenie to przestałoby być słusznem, o ilebyśmy pominęli, w wypadku $p > 2$ i $(n - m) > 1$, zastrzeżenie co do dziedziny Σ.

12. **Wniosek z twierdzenia III.** *Jeżeli elementy macierzy*

$$\|a_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p)\|_{\substack{\mu=1,2\ldots m \\ \nu=1,2\ldots n}}, \quad m < n,$$

są funkcjami ciągłemi w dziedzinie Σ przestrzeni euklidesowej p-wymiarowej; rząd tej macierzy wynosi m we wszystkich punktach Σ; a w wypadku, gdy $p > 2$ i $(n - m) > 1$, Σ jest dziedziną jednospójną acykliczną;

to istnieje $(n - m)n$ dalszych funkcyj $a_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p)$, $\mu = m + 1, m + 2, \ldots n$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, ciągłych w Σ, które łącznie z funkcjami zadanemi prowadzą do wyznacznika, spełniającego nierówność:

$$|a_{\mu,\nu}|_{\mu,\nu=1,2\ldots n} \neq 0$$

we wszystkich punktach dziedziny Σ.

Dla wygody czytelnika przytoczę dwa znane twierdzenia o inwersji układów funkcyj.

13. **Twierdzenie IV.**[1] *Jeżeli funkcje $h_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, $\nu = 1, 2 \ldots n$, posiadają pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p, $p \geqslant 1$, włącznie w otoczeniu punktu $(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0)$ i jakobian*

$$\left|\frac{\partial h_\nu}{\partial \xi_\mu}\right|_{\mu,\nu=1,2\ldots,n} \neq 0 \qquad w\ punkcie\ (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0),$$

to istnieje otoczenie punktu $(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0)$, w którem przekształcenie T, określone równaniami:

$$x_\nu = h_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

jest odwracalne.

14. **Twierdzenie V.**[2] *Jeżeli funkcje $h_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, $\nu = 1, 2 \ldots n$, są określone i posiadają ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu p, $p \geqslant 1$, włącznie w zbiorze otwartym B przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej; jakobian*

$$\left|\frac{\partial h_\nu}{\partial \xi_\mu}\right|_{\mu,\nu=1,2,\ldots n} \neq 0 \qquad w\ B;$$

---

[1]) Np. E. Goursat, Kurs analizy mat., rozdz. III, nr 42.

[2]) Np. O. Bolza, Vorl. über Variationsrechnung, rozdz. IV, str. 160, 1908.

przekształcenie T:

$$x_\nu = h_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

jest odwracalne w zbiorze B;

to T(B) [1] *jest n-wymiarowym zbiorem otwartym; funkcje odwrotne* $\xi_\mu = H_\mu(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\mu = 1, 2, \ldots n$, *określone w T(B), posiadają tamże pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p włącznie; jakobian*

$$\left| \frac{\partial H_\mu}{\partial x_\nu} \right|_{\nu, \mu = 1, 2, \ldots n} \neq 0 \quad w \ T(B).$$

Twierdzenie VI. *Jeżeli:*

15. *O jest niepustym, otwartym zbiorem punktów n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej;*

16. *A jest niepustym podzbiorem O, domkniętym względem O;*

17. *S jest niepustym podzbiorem A, domkniętym względem O;*

18. *T jest przekształceniem punktowem określonem i ciągłem w A, T przekształca punkty zbioru A w punkty p-wymiarowej przestrzeni euklidesowej;*

19. *przekształcenie T zacieśnione do zbioru S jest homeomorfją;*

20. *każdemu punktowi x zbioru S odpowiada taka liczba dodatnia* $\delta(x)$, *że przekształcenie T zacieśnione do zbioru* $A \times o(x; \delta(x))$ *jest odwracalne* [2];

21. *to istnieje zbiór otwarty B o następujących własnościach:*

$$S \subset B \subset O,$$

przekształcenie T zacieśnione do $A \times B$ *jest odwracalne.*

22. **Dowód.** Zbiór S może być uważany za sumę skończonej lub przeliczalnej liczby zbiorów S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, niepustych, domkniętych (bezwzględnie) i ograniczonych (zob. dow. tw. I, l. 3).

23. Istnieje taka liczba ϱ_1, $\varrho_1 > 0$, że przekształcenie T jest odwracalne w zbiorze

$$S + (A \times o[S_1; \varrho_1])$$ [3]

oraz

$$(A \times o[S_1; \varrho_1]) \subset O.$$

---

[1] $T(B)$ oznacza zbiór punktów, odpowiadających poprzez przekształcenie T punktom zbioru B.

[2] $A \times B$ oznacza wspólną część zbiorów A i B.

[3] $A + B$ oznacza sumę zbiorów A i B.

24. Aby tego dowieść przypuśćmy, że w każdym ze zbiorów

$$S + \left(A \times o\left[S_1; \frac{1}{r}\right]\right), \quad r = 1, 2, \ldots$$

istnieją dwa różne punkty $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, których obrazy poprzez T zlewają się:

$$x^{(r)} \neq y^{(r)},$$
$$T(x^{(r)}) = T(y^{(r)}), \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Wobec założenia 19, dla dowolnego wskaźnika r, któryś z punktów $x^{(r)}$, $y^{(r)}$ nie należy do S; niech to będzie $x^{(r)}$. Stąd dalej

$$x^{(r)} \varepsilon \left(A \times o\left[S_1; \frac{1}{r}\right]\right), \quad r = 1, 2, \ldots.$$

25. Ciąg $x^{(r)}$ jest ograniczony (22, 24). Można zeń wybrać ciąg $x^{(s(i))}$, $i = 1, 2, \ldots$, zbieżny do jakiegoś punktu $x^{(0)}$ tak, aby albo (1) wszystkie punkty ciągu $y^{(s(i))}$ należały do S, albo żeby zachodziło

(2) $$y^{(s(i))} \left(\varepsilon A \times o\left[S_1; \frac{1}{s(i)}\right]\right), \quad i = 1, 2, \ldots \ (24).$$

26. Wobec 24 $x^{(0)} \varepsilon S_1$ i $x^{(0)} \varepsilon S$. Z założenia 18 i ze związków 24, 25 wynika:

$$T(x^{s(i)}) = T(y^{(s(i))}) \to T(x^{(0)}), \text{ dla } i \to \infty.$$

27. Gdy zachodzi okoliczność (1), l. 25, to założenie 19 i związki 26 pociągają:

$$y^{(s(i))} \to x^{(0)}, \quad \text{dla } i \to \infty.$$

Jeżeli zachodzi (2), l. 25, to ciąg $y^{(s(i))}$, jako ograniczony (22), posiada punkt skupienia $y^{(0)}$, który musi należeć do S. Ze względu na 26 i zał. 18 $T(y^{(0)}) = T(x^{(0)})$ a wobec zał. 19 $y^{(0)} = x^{(0)}$. Zatem i w tym wypadku

$$y^{(s(i))} \to x^{(0)}, \quad \text{dla } i \to \infty.$$

28. Lecz ciąg $y^{(s(i))}$ nie może dążyć do $x^{(0)}$, wtedy bowiem przekształcenie T nie byłoby odwracalne w żadnem otoczeniu punktu $x^{(0)}$; wbrew założeniu 20 (porównaj 24). Musi zachodzić związek 23. (Liczba ϱ_1 może być obrana tak, aby $o[S_1; \varrho_1] \subset O$).

29. Posługując się rozumowaniem podobnem do powyższego (24—28) można dowieść, że: jeżeli istnieje skończony ciąg liczb

$\varrho_\mu, \varrho_\mu > 0$, $\mu = 1, 2, \ldots m$, taki, aby przekształcenie T było odwracalnem w zbiorze:

$$S + \left(A \times \sum_{\mu=1}^{m} o[S_\mu;\ \varrho_\mu]\right)$$

i aby

$$\left(\sum_{\mu=1}^{m} o\,[S_\mu;\ \varrho_\mu]\right) \subset O,$$

to istnieje taka liczba ϱ_{m+1}, $\varrho_{m+1} > 0$, że przekształcenie T jest odwracalne w zbiorze

$$S + \left(A \times \sum_{\mu=1}^{m+1} o\,[S_\mu;\ \varrho_\mu]\right)$$

i

$$\left(\sum_{\mu=1}^{m+1} o\,[S_\mu;\ \varrho_\mu]\right) \subset O\ ^{1)}.$$

30. Wobec związków 23 i 29 istnieje ciąg liczb ϱ_μ, $\varrho_\mu > 0$, $\mu = 1, 2, \ldots$, taki, że przekształcenie T jest odwracalne w każdym ze zbiorów:

$$S + \left(A \times \sum_{\mu=1}^{m} o(S_\mu;\ \varrho_\mu)\right), \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Łatwo stwierdzić, że zbiór $B = \sum_{\mu=1}^{\infty} o\,(S_\mu;\ \varrho_\mu)$ spełnia warunki 21 (zob. 22, 30).

31. **Wniosek z twierdzenia VI.** [2]) *Jeżeli:*

A jest dziedziną n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, S niepustym podzbiorem A, domkniętym względem A;

funkcje $h_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, są ciągłe i posiadają ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu p włącznie $(p \geqslant 1)$ w dziedzinie A; jakobian

$$\left|\frac{\partial h_\nu}{\partial \xi_\mu}\right|_{\mu, \nu = 1, 2, \ldots n} \neq 0 \textit{ we wszystkich punktach zbioru } S;$$

---

[1]) Należy skorzystać z tego, że zbiór $A \times \sum_{\mu=1}^{m} o[S_\mu;\ \varrho_\mu]$ jest ograniczony i domknięty (zał. 16).

[2]) Jest to uogólnienie twierdzenia O. Bolzy; zob. str. 3.

przekształcenie T, określone równościami:

$$x_\nu = h_\nu(\xi), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

zacieśnione do S, jest homeomorfją;

to istnieje zbiór otwarty B taki, że

$$S \subset B \subset A;$$

jakobian

$$\left|\frac{\partial h_\nu}{\partial \xi_\mu}\right|_{\mu,\nu=1,2,\ldots n} \neq 0 \quad w\ B;$$

przekształcenie T zacieśnione do B jest odwracalne;

funkcje odwrotne $\xi_\mu = H_\mu(x)$, $\mu = 1, 2, \ldots n$, *są ciągłe i posiadają ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu p włącznie w zbiorze otwartym* $T(B)$;

jakobian

$$\left|\frac{\partial H_\mu}{\partial x_\nu}\right|_{\nu,\mu=1,2,\ldots n} \neq 0 \qquad w\ T(B).$$

Dowód wypływa bezpośrednio z twierdzeń IV i V.

Rozdział II.

Twierdzenie VII. [1]) *Jeżeli:*

1. *funkcje* $f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, $n > m$, *są ciągłe i posiadają ciągłe pochodne cząstkowe (w wypadku* $m = 1$ *zwyczajne) aż do rzędu p,* $p \geqslant 1$, *włącznie w dziedzinie niepustej Σ przestrzeni m-wymiarowej euklidesowej;*

2. *macierz*

$$\left\|\frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_\mu}\right\|_{\substack{\mu=1,2,\ldots m \\ \nu=1,2,\ldots n}}$$

jest rzędu m we wszystkich punktach dziedziny Σ;

3. *przekształcenie punktowe U określone w Σ równaniami:*

$$x_\nu = f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

jest homeomorfją;

---

[1]) Twierdzenie to stanowi rozwiązanie tej modyfikacji problemu p. prof. W. Wilkosza, do której badania zachęcił mnie p. prof. T. Ważewski.

4. *$\mathfrak{S}$ jest obrazem dziedziny Σ poprzez U* [1]*);*

5. *i jeżeli w wypadku, gdy $m > 2$ i $n\text{-}m > 1$, Σ jest homeomorfją kuli m-wymiarowej;*

6. *to istnieje n-m funkcyj $F_\lambda(x_1, x_2 \dots x_n)$, $\lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m$, określonych i posiadających pochodne cząstkowe aż do rzędu p włącznie ciągłe w dziedzinie $\mathfrak{D}$ przestrzeni n-wymiarowej, oraz spełniających następujące warunki:*

7. *Macierz*

$$\left\| \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu = 1, 2, \dots n, \\ \lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m,}}$$

jest rzędu n-m w dowolnym punkcie dziedziny $\mathfrak{D}$;

8. *zbiór punktów dziedziny $\mathfrak{D}$, czyniących zadość układowi równań*

$$F_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m,$$

jest identyczny ze zbiorem $\mathfrak{S}$.

9. **Uwaga.** Zastrzeżenie 5 pochodzi stąd, że w dowodzie wypadnie mi powołać się na wniosek z twierdzenia III (rozdz. I, l. 12). Nie wiem czy zastrzeżenie to jest konieczne. Natomiast założenie 3 jest istotne; nie wystarczy tu nawet odwracalność przekształcenia U. Przykładem na to jest płat powierzchniowy $\mathfrak{S}$, określony zapomocą równań:

$$\begin{aligned} & x_1 = \sin \xi_1, \\ & x_2 = \sin(2\,\xi_1), \\ & x_3 = \xi_2, \\ & 0 < \xi_1 < 2\pi, \quad 0 < \xi_2 < 1. \end{aligned}$$

$\mathfrak{S}$ jest jednojednoznacznym obrazem wnętrza prostokąta i spełnia założenia 1, 2, 5. W każdym punkcie odcinka $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $0 < x_3 < 1$, istnieją dwie różne płaszczyzny styczne do $\mathfrak{S}$, a wobec tego $\mathfrak{S}$ nie może być przedstawione przy pomocy funkcyj uwikłanych, spełniających warunki 6, 7, 8 [2]).

10. **Dowód.** Kładziemy:

$$\alpha_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m) = \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_\mu},$$
$$\mu = 1, 2, \dots m, \quad \nu = 1, 2, \dots n.$$

---

[1]) Zbiór $\mathfrak{S}$ spełniający warunki 1—5 będziemy nazywać regularnym m-wymiarowym płatem powierzchniowym klasy C^p.

[2]) Na możliwość budowania tego rodzaju przykładów zwrócił mi uwagę p. prof. T. Ważewski.

11. Na mocy wniosku z twierdzenia III (rozdz. I, l. 12) i wobec założeń 1, 2, 5, istnieje $(n\text{-}m)n$ dalszych funkcyj

$$a_{\mu,\nu}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m), \quad \mu = m+1, \dots n, \quad \nu = 1, 2, \dots n,$$

ciągłych w dziedzinie Σ, takich, że wyznacznik:

$$|a_{\mu,\nu}(\xi)|_{\mu,\nu=1,2,\dots n} \neq 0 \quad \text{we wszystkich punktach dziedziny } \Sigma.$$

12. Wyznacznik n-ego stopnia W jest funkcją ciągłą swych n^2 elementów. Zbiór Z zer tej funkcji jest domknięty. Odległość $\varrho(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots \alpha_{n,n})$ punktu $(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots \alpha_{2,1}, \dots \alpha_{n,n})$ przestrzeni n^2-wymiarowej od zbioru Z jest funkcją ciągłą w całej przestrzeni n^2-wymiarowej [1]) i zeruje się tylko w punktach zbioru Z.

13. Przyjmijmy:

$$\eta(\xi) = \frac{\varrho(\alpha_{1,1}(\xi), \alpha_{1,2}(\xi), \dots \alpha_{2,1}(\xi), \dots \alpha_{n,n}(\xi))}{2n}$$

Funkcja złożona $\eta(\xi)$ jest ciągła i dodatnia we wszystkich punktach dziedziny Σ (1, 11, 12).

14. Na zasadzie twierdzenia II (rozdz. I, l. 10) istnieje $n(m\text{-}n)$ funkcyj $\beta_{\mu,\nu}(\xi)$ fizykalnych w dziedzinie Σ i spełniających tamże nierówności:

$$|\beta_{\mu,\nu}(\xi) - \alpha_{\mu,\nu}(\xi)| \leqslant \eta(\xi),$$
$$\mu = m+1,\ m+2, \dots n,\ \nu = 1, 2, \dots n.$$

15. We wszystkich punktach dziedziny Σ zachodzi nierówność:

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}(\xi), & \alpha_{1,2}(\xi), \dots & \alpha_{1,n}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m,1}(\xi), & \alpha_{m,2}(\xi), \dots & \alpha_{m,n}(\xi) \\ \beta_{m+1,1}(\xi), & \beta_{m+1,2}(\xi), \dots & \beta_{m+1,n}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n,1}(\xi), & \beta_{n,2}(\xi), \dots & \beta_{n,n}(\xi) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Niech bowiem punkt ξ^0 należy do Σ; odległość pomiędzy punktami n^2-wymiarowemi:

$$P = (\alpha_{1,1}(\xi^0), \alpha_{1,2}(\xi^0), \dots \alpha_{2,1}(\xi^0), \dots \alpha_{n,n}(\xi^0)) \text{ i}$$
$$Q = (\alpha_{1,1}(\xi^0), \alpha_{1,2}(\xi^0), \dots \alpha_{m,n}(\xi^0), \beta_{m+1,1}(\xi^0), \dots \xi_{n,n}(\xi^0))$$

---

[1]) Carathéodory, str. 198, Vorl. über Reelle Functionen.

wynosi:

$$\sqrt{\sum_{\substack{\mu=m+1,m+2,\dots n\\ \nu=1,2\dots n}}(\beta_{\mu,\nu}(\xi^0)-\alpha_{\mu,\nu}(\xi^0))^2}$$

a zatem nie przekracza liczby

$$\sqrt{n^2\cdot(\eta(\xi^0))^2}=\frac{\varrho(\alpha_{1,1}(\xi^0),\dots\alpha_{n,n}(\xi^0))}{2} \text{ (zob. 13, 14)},$$

podczas gdy odległość jakiegokolwiek punktu zerowego wyznacznika n-ego stopnia W od punktu P jest niemniejsza niż

$$\varrho(\alpha_{1,1}(\xi^0),\ \alpha_{1,2}(\xi^0),\dots\alpha_{n,n}(\xi^0)) \text{ (zob. 12).}$$

16. Ogół punktów $(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)$, przestrzeni n-wymiarowej, takich, że punkt m-wymiarowy $(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_m)$ należy do dziedziny Σ, jest dziedziną n-wymiarową, którą oznaczymy przez A.

17. Literą S oznaczymy zbiór tych punktów dziedziny A, dla których $\xi_\mu=0$, $\mu=m+1,\dots n$; S jest zbiorem niepustym, zawartym w A, domkniętym względem A.

18. Literą T oznaczymy przekształcenie:

$$x_\nu=h_\nu(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)=f_\nu(\xi_1,\dots\xi_m)+\sum_{\mu=m+1}^{n}\xi_\mu\cdot\beta_{\mu,\nu}(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_m),$$
$$\nu=1,2,\dots n.$$

19. Funkcje h_ν są klasy C^p w dziedzinie A (zob. 1, 14).

Jakobian:

$$\left|\frac{\partial h_\nu}{\partial\xi_\mu}\right|_{\mu,\nu=1,2,\dots n}=\Delta(\xi)\neq 0$$

we wszystkich punktach zbioru S (zob. 10, 15, 17). Przekształcenie T, zacieśnione do zbioru S, jest homeomorfją (3, 17).

Obrazem zbioru S poprzez T jest $\mathfrak{S}$ (5, 17).

20. Przy zachowaniu oznaczeń, spełnione są założenia wniosku z twierdzenia VI (rozdz. I, l. 31).

Wobec tego istnieje zbiór otwarty B, obejmujący zbiór S, zawarty w A i taki, że przekształcenie T zacieśnione do B jest odwracalne, jakobian

$$\left|\frac{\partial h_\nu}{\partial\xi_\mu}\right|_{\mu,\nu=1,2,\dots n}\neq 0 \text{ w } B,$$

funkcje odwrotne $H_\mu(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\mu = 1, 2, \ldots n$, są klasy C^p w zbiorze otwartym $T(B)$, jakobian

$$\left|\frac{\partial H_\mu}{\partial x_\nu}\right|_{\nu,\mu=1,2,\ldots n} \neq 0 \quad \text{w } T(B).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że macierz:

$$\left\|\frac{\partial H_\mu}{\partial x_\nu}\right\|_{\substack{\nu=1,2,\ldots n \\ \mu=m+1,\ldots n}}$$

jest rzędu n-m w dowolnym punkcie zbioru $T(B)$.

21. Nietrudno dowieść (17), że ze zbioru B można wyjąć pewną dziedzinę D, n-wymiarową, obejmującą zbiór S. Związki 20 zachodzą a fortiori w D; $\mathfrak{D} = T(D)$ jest dziedziną obejmującą zbiór $\mathfrak{S}$.

22. Punkt $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wtedy i tylko wtedy należy do $\mathfrak{S}$, gdy odpowiadający mu punkt $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ należy do S (19); a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\xi_\mu = H_\mu(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \mu = m+1, \ldots n,$$

i $\quad (x_1, x_2, \ldots x_n) \varepsilon \mathfrak{D}$ (zob. 17, 20).

Dla ukończenia dowodu przyjmiemy:

$$F_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n) = H_{\lambda+m}(x_1, x_2, \ldots x_n),$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots n\text{-}m.$$

23. **Twierdzenie VII'.** *Jeżeli funkcje $f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, $n > m$, są ciągłe i posiadają pochodne cząstkowe ciągłe wszystkich rzędów w niepustej dziedzinie Σ przestrzeni m-wymiarowej i jeżeli funkcje te spełniają założenia* 2—5 *twierdzenia VII, to istnieje n-m funkcyj $F_\lambda(x_1, \ldots x_n)$, $\lambda = 1, 2, \ldots n$-m, ciągłych wraz z pochodnemi cząstkowemi wszystkich rzędów w dziedzinie $\mathfrak{D}$ przestrzeni n-wymiarowej i spełniających warunki* 7, 8, *figurujące w twierdzeniu VII.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że funkcje $h_\nu(\xi)$, zdefinjowane w poprzednim dowodzie (18), musiałyby być fizykalne, co pociągałoby fizykalność funkcyj odwrotnych $H_\mu(x)$ (20).

24. Metoda powyższa pozwala udowodnić analogiczne twierdzenie dla funkcyj analitycznych, jedynie w wypadku $n = m + 1$. Przekształcenie T (18) będzie tu miało postać:

$$x_\nu = f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) + \xi_n \cdot A_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m),$$
$$\nu = 1, 2, \ldots n,$$

gdzie A_ν są minorami głównemi macierzy:

$$\left\| \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_u} \right\|_{\substack{u=1,2\ldots m \\ \nu=1,2\ldots n}}.$$

25. Twierdzenie VII obejmuje między innemi regularne łuki proste, bez końców, nie zagęszczające się na sobie.

Dla krzywych zamkniętych zachodzi:

26. **Twierdzenie VIII.** *Jeżeli:*

funkcje $\varphi_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, $n \geqslant 2$, *posiadają ciągłe pochodne rzędu* p, $p \geqslant 1$, *dla* $-\infty < t < +\infty$;

27. $\varphi_\nu(t) = \varphi_\nu(t + 2\pi)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, *dla dowolnego* t;

28. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\varphi'_\nu(t)| > 0$ wszędzie;

29. *układ równości:*

$$\varphi_\nu(t) = \varphi_\nu(t'), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

pociąga zawsze $t \equiv t' \pmod{2\pi}$;

30. $\mathcal{K}$ *oznacza zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej, wyznaczony równaniami:*

$$x_\nu = \varphi_\nu(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots n, \quad -\infty < t < +\infty;$$

31. *to istnieje* n-1 *funkcyj* $F_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\lambda = 1, 2, \ldots n$-1, *posiadających pochodne cząstkowe aż do rzędu p włącznie ciągłe w dziedzinie* $\mathfrak{D}$ *przestrzeni n-wymiarowej, takich, że:*

32. *rząd macierzy*

$$\left\| \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu=1,2,\ldots n \\ \lambda=1,2,\ldots n-1}}$$

wynosi n-1 *w każdym punkcie dziedziny* $\mathfrak{D}$;

33. *Zbiór punktów x, należących do* $\mathfrak{D}$ *i spełniających układ równań*

$$F_\lambda(x) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots n\text{-}1,$$

jest identyczny ze zbiorem $\mathcal{K}$.

34. **Dowód.** Nierówności:

$$-\infty < t < +\infty, \quad u > 0$$

wyznaczają dwuwymiarową dziedzinę R. Przyjmijmy

$$x_\nu = \psi_\nu(t, u) = \varphi_\nu(t), \qquad \nu = 1, 2 \ldots n,$$
$$x_{n+1} = \psi_{n+1}(t, u) = u.$$

Funkcje ψ_ν są klasy C^p, macierz

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial t}, & \dots & \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial u}, & \dots & \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial u} \end{matrix} \right\|$$

jest rzędu drugiego w R (zał. 28).

35. Połóżmy:

$$\xi_1 = \xi_1(t, u) = u \cdot \sin t$$
$$\xi_2 = \xi_2(t, u) = u \cdot \cos t$$

dla $-\infty < t < +\infty$, $u > 0$.

Układ ten przekształca dziedzinę R w dziedzinę, którą nazwiemy Σ, powstałą przez wyrzucenie z płaszczyzny (ξ_1, ξ_2) punktu $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$.

Przekształcenie $\xi_1(t, u)$, $\xi_2(t, u)$ jest lokalnie odwracalne. Funkcje odwrotne $t(\xi_1, \xi_2)$, $u(\xi_1, \xi_2)$, określone w otoczeniu dowolnego punktu dziedziny Σ, są analityczne; wyznacznik funkcyjny:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial t}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial t}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \end{matrix} \right\| \neq 0$$

w otoczeniu tegoż punktu.

36. Wobec kształtu równań 35 i wobec założeń 27, 29, przekształcenie U:

$$x_\nu = f_\nu(\xi_1, \xi_2) = \psi_\nu(t(\xi_1, \xi_2), u(\xi_1, \xi_2)),$$
$$\nu = 1, 2, \dots n+1,$$

może być uważanem za jednoznaczne i odwracalne w dziedzinie Σ. Funkcje $f_\nu(\xi_1, \xi_2)$, $\nu = 1, 2, \dots n+1$, są klasy C^p, macierz

$$\left\| \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_\mu} \right\|_{\substack{\mu=1,2 \\ \nu=1,2,\dots n+1}}$$

jest rzędu 2 w dziedzinie Σ (34, 35).

37. Oznaczmy literą $\mathcal{S}$ obraz dziedziny Σ poprzez U. Zbior $\mathcal{S}$ jest zanurzony w przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej. Jeżeli punkt $(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1})$ należy do $\mathcal{S}$, to punkt $(x_1, \dots x_n)$ należy do $\mathcal{H}$ i naodwrót, o ile tylko $x_{n+1} > 0$ (34, 36).

38. Przekształcenie U jest homeomorfją. Aby tego dowieść załóżmy, że ciąg punktów $(x_1^i, x_2^i, \ldots x_{n+1}^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, należących do $\mathcal{S}$, zdąża do punktu $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{n+1}^0)$, należącego również do $\mathcal{S}$. Przypuśćmy, że

$$x_\nu^0 = \varphi_\nu(t^0),\ \nu = 1, 2, \ldots n \text{ (zob. 30, 37).}$$

Na mocy założenia 27 dla dowolnego naturalnego i będzie istniał taki punkt t^i, że

$$x_\nu^i = \varphi_\nu(t^i), \qquad \nu = 1, 2, \ldots n, \quad |t^i - t^0| \leqslant \pi.$$

Jeżeli t' jest punktem skupienia ciągu t^i, to

$$\varphi_\nu(t^0) = \varphi_\nu(t') \qquad \text{(zał. 26),}$$
$$t^0 \equiv t' \text{ (mod. } 2\pi) \qquad \text{(zał. 29),}$$

a stąd i z ostatniej nierówności $t^0 = t'$. Ciąg punktów $(t^i, u^i) = (t^i, x_{n+1}^i)$ dąży do punktu $(t^0, u^0) = (t^0, x_{n+1}^0)$ (zob. 34); ciąg punktów

$$\xi_1^i = u^i \cdot \sin t^i,\ \xi_2^i = u^i \cdot \cos t^i$$

dąży do punktu

$$\xi_1^0 = u^0 \cdot \sin t^0,\ \xi_2^0 = u^0 \cdot \cos t^0.$$

Ale (ξ_1^i, ξ_2^i), (ξ_1^0, ξ_2^0) są to punkty, którym poprzez U odpowiadają punkty $(x_1^i, x_2^i, \ldots x_{n+1}^i)$, $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{n+1}^0)$ (36). Dowiedliśmy, że przekształcenie odwrotne do U jest ciągłe w $\mathcal{S}$, a więc U jest homeomorfją.

39. Z twierdzenia VII wynika (36, 37, 38), że istnieje n-1 funkcyj $F'_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_{n+1})$ klasy C^p w pewnej dziedzinie $\mathcal{D}'$, obejmującej $\mathcal{S}$ i takich, że macierz

$$\left\| \frac{\partial F'_\lambda}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu=1,2,\ldots n+1 \\ \lambda=1,2,\ldots n-1}}$$

jest z rzędu n-1 w $\mathcal{D}'$ a układ równań $F'_\lambda(x_1, \ldots x_{n+1}) = 0$, $\lambda = 1, 2, \ldots n\text{-}1$, wyznacza $\mathcal{S}$.

40. Ostatni wiersz powyższej macierzy zeruje się we wszystkich punktach $\mathcal{S}$; bo jeżeli punkt $(x'_1, x'_2, \ldots x'_{n+1})$ należy do $\mathcal{S}$, to cały promień:

$$x_\nu = x'_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots n,$$
$$0 < x_{n+1} < +\infty$$

należy do $\mathcal{S}$ (37) i wszystkie funkcje $F_\lambda(x)$ zerują się na tym promieniu. Wobec tego w punktach zbioru $\mathcal{S}$ i w jego otoczeniu macierz:

$$\left\| \frac{\partial F'_\lambda}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu=1,2,\dots n \\ \lambda=1,2,\dots n\text{-}1}}$$

jest rzędu n-1.

41. Przyjmijmy nakoniec:

$$F_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = F'_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n, 1);$$

funkcje te spełniają związki 31, 32 w pewnym zbiorze otwartym w którym możemy wyszczególnić dziedzinę, nazwijmy ją $\mathcal{D}$, obejmującą $\mathcal{K}$. A wobec 39 i 37 zachodzi również 33.

42. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla obwodów, danych zapomocą funkcyj parametrycznych, posiadających pochodne wszystkich rzędów.

43. Przypuśćmy, że dla funkcyj $f_\nu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m)$, $\nu = 1, 2, \dots n$, klasy C^p i dla dziedziny Σ zachodzą założenia twierdzenia VII, 1—5. Powróćmy do dowodu tego twierdzenia (16—19).

Jeżeli w równaniach 18 położymy, dla $\mu = m+1, \dots n$, $\xi_\mu = 0$, to otrzymamy równania parametryczne regularnego płata powierzchniowego $\mathcal{S}$. Jeżeli za zmienne ξ_μ, $\mu = m+1, m+2, \dots n$, położymy stałe c_μ dostatecznie bliskie zera, to otrzymamy układ funkcyj m zmiennych, określonych w niepustym zbiorze otwartym, który zdąża do zbioru Σ, gdy stałe c_μ dążą do zera. Płat powierzchniowy $\mathcal{S}$ jest zanurzony w (m-n)-parametrowej rodzinie regularnych płatów powierzchniowych, zależnych w sposób regularny od parametrów c_μ. Reprezentację uwikłaną tej rodziny powierzchni daje układ równań:

$$F_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = c_\mu, \quad \lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m.$$

Co więcej, można osiągnąć to, aby wszystkie powierzchnie rodziny były homeomorficzne i izotopowe [1]) z płatem $\mathcal{S}$:

44. **Twierdzenie IX.** [2]) *Jeżeli zachodzą założenia od* 1—5 *twierdzenia VII*

[1]) Definicja zbiorów izotopowych zob. W. Wilkosz: Les propriétés topologiques du plan euclidien, str. 53.

[2]) Twierdzenie to jest odpowiedzią na zagadnienie, postawione przez p. prof. T. Ważewskiego.

45. *i jeżeli C jest n-wymiarową dziedziną punktów* $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ *dla których* $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ *jest punktem dziedziny* Σ *a pozostałe spółrzędne spełniają nierówności*:

$$|\xi_\mu| < 1, \quad \mu = m+1, m+2, \ldots n;$$

46. *to istnieje n funkcyj* $g_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, *klasy* C^p *w dziedzinie C, spełniających następujące warunki*:

47. $$\left| \frac{\partial g_\nu}{\partial \xi_\mu} \right|_{\mu,\nu=1,2,\ldots n} \neq 0$$

we wszystkich punktach dziedziny C;

48. $$g_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, 0, 0, \ldots 0) = f_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m),$$
$$\nu = 1, 2, \ldots n;$$

49. *przekształcenie W*:

$$x_\nu = g_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

określone w C jest homeomorfją;

50. *układ funkcyj*:

$$x_\nu = g_\nu(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n),$$
$$\nu = 1, 2, \ldots n,$$
$$|c_\mu| < 1, \ \mu = m+1, m+2, \ldots n,$$

jest określony w dziedzinie Σ *i przedstawia regularny płat powierzchniowy, homeomorficzny i izotopowy z płatem S.*

51. **Dowód.** Oznaczmy przez $\varrho(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ odległość punktu $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ od brzegu dziedziny D (zob. 21).

$\varrho(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, 0, 0, \ldots 0)$ jest funkcją ciągłą, dodatnią w m-wymiarowej dziedzinie Σ.

52. Na mocy twierdzenia II (rozdz. I) istnieje funkcja fizykalna $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, spełniająca w całej dziedzinie Σ nierówność:

$$\left| \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) - \frac{2}{3\sqrt{n-m}} \varrho(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, 0, 0, \ldots 0) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{3\sqrt{n-m}} \varrho(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, 0, 0, \ldots 0),$$

a stąd także nierówność:

$$0 < \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) \leqslant \frac{\varrho(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m, 0, 0, \ldots 0)}{\sqrt{n-m}}.$$

53. Przekształcenie V:

$$\bar{\xi}_\mu = \xi_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \dots m,$$
$$\bar{\xi}_\mu = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m) \cdot \xi_\mu, \quad \mu = m + 1, \dots n,$$

jest określone i odwracalne w dziedzinie C ($\varphi > 0$). Funkcje składowe przekształcenia V są fizykalne, jakobian tych funkcyj wynosi $[\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m)]^{n-m} \neq 0$ we wszystkich punktach dziedziny C.

$V(C) \subset D$ (zob. 51, 52).

54. Dla ukończenia dowodu wystarczy przyjąć:

$$g_\nu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = h_\nu(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots \bar{\xi}_n),$$
$$\nu = 1, 2, \dots n,$$

gdzie h_ν są funkcjami figurującemi w równościach 18, a za $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots \bar{\xi}_n$ należy podstawić prawe strony równości 53.

55. Analogiczne twierdzenie możnaby wypowiedzieć i udowodnić dla funkcyj posiadających ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów.

56. Każdy łuk regularny pojedyńczy lub regularna krzywa zamknięta, bez punktów wielokrotnych, zanurzona w przestrzeni n-wymiarowej, może być przedstawiona zapomocą układu równań:

$$F_\lambda(x) = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots n\text{-}1,$$

gdzie F_λ są określone w dziedzinie. Różniczkując dostaniemy układ:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{dx_\nu}{dt} = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots n\text{-}1.$$

Ponieważ macierz spółczynników jest rzędu n-1, więc można podać niezerowe rozwiązania na $\frac{dx_\nu}{dt}$. Otrzymamy układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \chi_\nu(x_1, x_2, \dots x_n), \quad \nu = 1, 2, \dots n.$$

Całka ostatniego układu, przechodząca przez punkt $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$, należący do danej krzywej, jest identyczna z daną krzywą [1]).

[1]) Uwagę tę zawdzięczam p. prof. T. Ważewskiemu.

Rozdział III.

Definicja R. [1]) *Niepusty zbiór $\mathcal{S}$ punktów n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej nazwiemy **regularną powierzchnią m-wymiarową klasy** C^p, $p \geqslant 1$, jeżeli:*

1. *każdemu punktowi x^0 zbioru $\mathcal{S}$ odpowiadają dwie liczby dodatnie $r(x^0) > 0$ i $\varrho(x^0) > 0$ oraz n funkcyj $f_{x^0;\nu}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, $n > m$, określonych i posiadających pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p włącznie w domkniętem otoczeniu $o[P; \varrho(x^0)]$ pewnego punktu P przestrzeni m-wymiarowej, takich, że*

2. *rząd macierzy*

$$\left\| \frac{\partial f_{x^0;\nu}}{\partial \xi_\mu} \right\|_{\substack{\mu=1,2,\ldots m \\ \nu=1,2,\ldots n}}$$

wynosi m w punkcie P;

3. *przekształcenie U_{x^0}:*

$$x_\nu = f_{x^0;\nu}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \qquad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

jest odwracalne w zbiorze $o[P; \varrho(x^0)]$; $x^0 = U_{x^0}(P)$;

4. $U_{x^0}(o[P; \varrho(x^0)]) \times o[x^0; r(x^0)] = \mathcal{S} \times o[x^0; r(x^0)]$,

5. *$\mathcal{S}$ nie jest sumą dwu zbiorów rozłącznych, czyniących zadość poprzednim warunkom.*

---

[1]) Definicja ta pokrywa się w zasadzie z definicją, którą dał L. D. Ames: An Arithmetic Traetement of Some Problems i Analysis Situs. American Journal of Mathematics, vol. XXVII, p. 365.

Pozostawiam na boku pytanie, czy zbiory punktów, spełniające warunki 1—5, są powierzchniami w sensie Brouwera, czy mianowicie są triangulowalne. Rozważanie tej kwestji nie mieści się w granicach zagadnienia, którem się tu zajmuję. Poprzestanę na paru cytatach.

L. D. Ames w przytoczonej powyżej pracy naszkicował metodę, która mogłaby posłużyć do dokonania triangulacji powierzchni w sensie definicji R, dwuwymiarowej i zamkniętej.

T. Radó udowodnił możliwość triangulacji mnogości topologicznych dwuwymiarowych przy założeniach ogólniejszych: über den Begriff der Riemanschen Fläche 1925 (Acta Litterarum Ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Sectio Sc. Math. t. II, fasc. II).

Niezależnie odeń także p. prof. W. Wilkosz uzyskał twierdzenie o triangulacji przestrzeni topologicznych. Dowód, podany przez niego na posiedzeniu Pol. Tow. Mat. w Krakowie 11 XII 1926, aczkolwiek dotyczył przestrzeni dwuwymiarowych, nadaje się do uogólnienia na wypadek większej liczby wymiarów.

6. Warunek 5, wyrażający spójność[1]) powierzchni S, jest równoważny następującemu: każde dwa punkty zbioru S mogą być połączone łukiem Jordana złożonym z punktów zbioru S.

7. Analogicznie możnaby określić *powierzchnię fizykalną* czy też *analityczną*.

8. Warunki 1—5 mogą być zastąpione innemi, równoważnemi: Niepusty, spójny zbiór S punktów przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej jest regularną powierzchnią m-wymiarową klasy C^p, $p \geqslant 1$, zawartą w przestrzeni n-wymiarowej wtedy i tylko wtedy, gdy każdemu punktowi $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ odpowiadają dwie liczby dodatnie $r'(x^0)$, $\varrho'(x^0)$ i ciąg liczb $i(1), i(2), \dots i(m)$, wybrany z ciągu $1, 2, 3, \dots n$, o następujących własnościach: istnieje n-m funkcyj $\Xi_k(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \dots x_{i(m)})$, $k = 1, 2, \dots n\text{-}m$, klasy C^p w $o(x_{i(1)}^0, x_{i(2)}^0, \dots x_{i(m)}^0; \varrho'(x^0))$ takich, że jeżeli $j(1), j(2), \dots j(n\text{-}m)$ jest ciągiem liczb, powstałym z ciągu $1, 2, \dots n$, po usunięciu liczb $i(1), i(2), \dots i(m)$, a S'_{x^0} oznacza zbiór punktów $(x_1, x_2, \dots x_n)$, spełniających układ równań:

$$x_{j(k)} = \Xi_k(x_{i(1)}, \dots x_{i(m)}), \qquad k = 1, 2, \dots n\text{-}m,$$

gdzie $(x_{i(1)}, \dots x_{i(m)})$ należy do $o(x_{i(1)}^0, \dots x_{i(m)}^0; \varrho'(x^0))$, to

$$S'_{x^0} \times o(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0;\ r'(x^0)) = S \times o(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0;\ r'(x^0)).$$

9. Jeżeli S spełnia warunki 1—5 lub 8, to istnieje dziedzina n-wymiarowa Ω, obejmująca S, taka, że S jest zbiorem domkniętym względem Ω. Za Ω można przyjąć sumę otoczeń otwartych $o(x; r(x))$, wziętych dla wszystkich punktów x powierzchni S.

10. W otoczeniu dowolnego punktu x^0 powierzchni S można wyznaczyć układ n-m wektorów normalnych do S w punkcie x, wzajemnie ortogonalnych i ciągłych w zależności od punktu x, poruszającego się po powierzchni S. W dalszym ciągu ograniczymy się do badania wypadku, gdy taki układ może być w sposób ciągły określony na całej powierzchni S. Nie jest to możliwem już dla jakiejkolwiek powierzchni jednostronnej, zanurzonej w przestrzeni euklidesowej, np. dla wstęgi Moebiusa w przestrzeni trój-wymiarowej.

11. **Definicja N.** *O m-wymiarowej regularnej powierzchni S klasy C^p, $p \geqslant 1$, zanurzonej w przestrzeni n-wymiarowej euklidesowej*,

---

[1]) Definicja spójności, zob. np. W. Wilkosz, Les propriétés topologiques du plan euclidien, str. 22.

powiemy, że **spełnia warunek** *N, jeżeli każdemu punktowi x powierzchni $\mathfrak{S}$ można przyporządkować n-m wektorów:*

$$a_{\sigma,1}(x),\ a_{\sigma,2}(x), \ldots a_{\sigma,n}(x),\quad \sigma = 1, 2, \ldots n\text{-}m,$$

normalnych do $\mathfrak{S}$ w punkcie x, tak, aby funkcje $a_{\sigma,\nu}(x)$ były ciągłe w $\mathfrak{S}$ i spełniały tamże równości:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\sigma,\nu}(x)\, a_{\tau,\nu}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \sigma = \tau \\ 0, & \text{dla } \sigma \neq \tau \end{cases},$$
$$\sigma, \tau = 1, 2, \ldots n\text{-}m.$$

12. **Twierdzenie X.** *Jeżeli $\mathfrak{S}$ jest m-wymiarową regularną powierzchnią klasy C^p, $p \geqslant 1$, zanurzoną w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej* (zob. 1—5 lub 8)

13. *i jeżeli powierzchnia $\mathfrak{S}$ spełnia warunek* N (11),

14. *to istnieje n-m funkcyj $F_\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\lambda = 1, 2, \ldots n$-m, określonych i posiadających pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p włącznie w pewnej dziedzinie $\mathfrak{D}$, obejmującej $\mathfrak{S}$, takich, że*

15. *macierz:*

$$\left\| \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu=1,2,\ldots n \\ \lambda=1,2,\ldots n\text{-}m}}$$

jest rzędu n-m w $\mathfrak{D}$,

16. *zbiór punktów x, należących do dziedziny $\mathfrak{D}$ i spełniających układ równań:*

$$F_\lambda(x) = 0,\quad \lambda = 1, 2, \ldots n\text{-}m,$$

jest identyczny ze zbiorem $\mathfrak{S}$.

Lemat 1. Każdej parze liczb naturalnych (n, m) odpowiada taka liczba dodatnia $\varepsilon(n,m)$, *zależna tylko od n i m*, że jeżeli:

17. rząd macierzy

$$\| a_{\mu,\nu} \|_{\substack{\mu=1,2,\ldots m \\ \nu=1,2,\ldots n}}$$

wynosi m,

18. $$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\sigma,\nu}\, a_{\tau,\nu} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \sigma = \tau \\ 0, & \text{dla } \sigma \neq \tau \end{cases},\quad \sigma, \tau = 1, 2, \ldots n\text{-}m,$$

19. $$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\sigma,\nu}\, a_{\mu,\nu} = 0,\quad \sigma = 1, 2, \ldots n\text{-}m,\quad \mu = 1, 2, \ldots m,$$

20. i jeżeli:

$$|\beta_{\sigma,\nu} - a_{\sigma,\nu}| \leqslant \varepsilon(n, m),\quad \sigma = 1, 2, \ldots n\text{-}m,\quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

21. to wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, \dots & a_{m,n} \\ \beta_{1,1}, & \beta_{1,2}, \dots & \beta_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-m,1}, & \beta_{n-m,2}, \dots & \beta_{n-m,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

22. **Dowód.** Załóżmy, że zachodzą związki 17—19. Przypuśćmy, że $\Delta = 0$, że zatem istnieje niezerowy ciąg liczb $c_1, c_2, \dots c_n$, spełniających układ równości:

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_{\mu,\nu} + \sum_{\pi=1}^{n-m} c_{m+\pi} \beta_{\pi,\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots n. \quad (1)$$

Mnożymy ν-tą równość przez $\alpha_{\sigma,\nu}$, $\sigma = 1, 2, \dots n\text{-}m$, i sumujemy względem ν stronami równości w ten sposób otrzymane:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_{\mu,\nu} \alpha_{\sigma,\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\pi=1}^{n-m} c_{m+\pi} \beta_{\pi,\nu} \alpha_{\sigma,\nu} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots n\text{-}m.$$

Po przeporządkowaniu otrzymamy:

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma,\nu} a_{\mu,\nu} + \sum_{\pi=1}^{n-m} c_{m+\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma,\nu} \beta_{\pi,\nu} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots. n\text{-}m.$$

Pierwsze sumy odpadną (zob. 19), do drugich zastosujemy równości $\beta_{\pi,\nu} = \alpha_{\pi,\nu} + (\beta_{\pi,\nu} - \alpha_{\pi,\nu})$ i związki 18; będzie:

$$\sum_{\pi=1}^{n-m} c_{m+\pi} (\delta_{\sigma,\pi} + \gamma_{\sigma,\pi}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots n\text{-}m,$$

gdzie

$$\delta_{\sigma,\pi} = \begin{cases} 1, & \text{dla } \sigma = \pi \\ 0, & \text{dla } \sigma \neq \pi \end{cases},$$

$$\gamma_{\sigma,\pi} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma,\nu} (\beta_{\pi,\nu} - \alpha_{\pi,\nu}), \quad \pi, \sigma = 1, 2, \dots n\text{-}m. \quad (2)$$

Ciąg liczb $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots c_n$ jest niezerowy, w przeciwnym bowiem razie równości (1) zredukowałyby się do równości:

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_{\mu,\nu} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

gdzie $c_1, c_2, \ldots c_m$ nie mogłyby być wszystkie zerami, a to sprzecznie z założeniem 17.

Skoro jednak nie wszystkie $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots c_n$ zerują się, to musi się zerować wyznacznik:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 1+\gamma_{1,1}, & \gamma_{1,2}, & \ldots & \gamma_{1,n-m} \\ \gamma_{2,1}, & 1+\gamma_{2,2}, & \ldots & \gamma_{2,n-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n-m,1}, & \gamma_{n-m,2}, & \ldots & 1+\gamma_{n-m,n-m} \end{vmatrix}$$

Przeciwnie, jeśli wyznacznik Γ jest różny od zera, to Δ jest także różne od zera.

Γ jest funkcją ciągłą liczb $\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \ldots \gamma_{n-m,n-m}$ i wynosi 1, gdy wszystkie $\gamma_{\sigma,\pi}$ są zerami. Istnieje wobec tego $\varepsilon' > 0$ takie, że byleby tylko zachodziło

$$|\gamma_{\sigma,\pi}| \leqslant \varepsilon', \quad \sigma, \pi = 1, 2, \ldots n\text{-}m,$$

to już $\Gamma \geqslant \frac{1}{2}$ i $\Delta \neq 0$.

Ale z 18 wynika, że $|\alpha_{\sigma,\nu}| \leqslant 1$, $\sigma = 1, \ldots n\text{-}m$, $\nu = 1, \ldots n$, a zatem wystarczy przyjąć $\varepsilon(n, m) = \frac{\varepsilon'}{n}$ (równ. (2) i nier. 20).

23. **Dowód twierdzenia X.** W myśl założenia 13 istnieje $n(n\text{-}m)$ funkcyj $\alpha_{\sigma,\nu}(x)$, $\sigma = 1, 2, \ldots n\text{-}m$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, spełniających związki 11.

Do liczb n, m, występujących w założeniach twierdzenia X, dobierzemy stałą $\varepsilon(n, m)$ według lematu 1.

24. Powierzchnia S jest zawarta w pewnej dziedzinie n-wymiarowej Ω i domknięta względem Ω (zob. 9).

Na mocy twierdzenia II (rozdz. I, 10) istnieje $n(n\text{-}m)$ funkcyj $\beta_{\sigma,\nu}(x)$, $\sigma = 1, 2, \ldots n\text{-}m$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, fizykalnych w dziedzinie Ω i spełniających nierówności:

$$|\alpha_{\sigma,\nu}(x) - \beta_{\sigma,\nu}(x)| \leqslant \varepsilon(n, m), \quad \sigma = 1, 2, \ldots n\text{-}m, \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

we wszystkich punktach powierzchni S.

25. Oznaczymy literami O, A, S kolejno zbiory punktów $(X_1, X_2, \dots X_{2n-m})$ przestrzeni $(2n\text{-}m)$-wymiarowej, dla których:

(O) punkt $(X_1, X_2, \dots X_n)\,\varepsilon\,\Omega$, $X_{n+1}, \dots X_{2n-m}$ dowolne,
(A) punkt $(X_1, X_2, \dots X_n)\,\varepsilon\,\mathcal{S}$, $X_{n+1}, \dots X_{2n-m}$ dowolne,
(S) punkt $(X_1, X_2, \dots X_n)\,\varepsilon\,\mathcal{S}$, $X_{n+\lambda} = 0$, $\lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m$.

O jest $(2n\text{-}m)$-wymiarowym zbiorem otwartym, A podzbiorem O domkniętym względem O, S podzbiorem A domkniętym względem O (zob. 24).

26. Przekształcenie T:

$$x_\nu = g_\nu(X_1, X_2, \dots X_{2n-m}) = X_\nu + \sum_{\lambda=1}^{n-m} X_{n+\lambda} \cdot \beta_{\lambda,\nu}(X_1, X_2, \dots X_n),$$
$$\nu = 1, 2, \dots n,$$

jest określone i ciągłe w A. Przekształcenie T zacieśnione do zbioru S jest homeomorfją; $\mathcal{S} = T(S)$ (zob. 24, 25).

27. Niech $P^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots X_n^0, 0, 0, \dots 0)$ będzie dowolnym punktem zbioru S. Punkt $(X_1^0, X_2^0, \dots X_n^0) = T(P^0)$ należy do $\mathcal{S}$. Skorzystajmy z warunków 8 koniecznych i dostatecznych na to, aby zbiór $\mathcal{S}$ był regularną powierzchnią. Przez odpowiednie przemianowanie zmiennych $X_1, \dots X_n$ można osiągnąć to, aby ciąg liczb $i(1)$, $i(2), \dots i(m)$ (zob. 8) był równy ciągowi $n\text{-}m+1$, $n\text{-}m+2, \dots n$, a tem samem ciąg $j(1), \dots j(n\text{-}m)$ równy ciągowi $1, 2, \dots n\text{-}m$.

Istnieje liczba $R > 0$, o tej własności, że jeśli punkt $(X_1, X_2, \dots X_{2n-m})$ należy do $A \times o(P^0; R)$ (zob. 25), to

$$X_k = \Xi_k(X_{n-m+1}, X_{n-m+2}, \dots X_n), \qquad k = 1, 2, \dots n\text{-}m,$$

gdzie Ξ_k są funkcjami klasy C^p w otoczeniu punktu $(X_{n-m+1}^0, \dots X_n^0)$.

28. W punktach zbioru $A \times o(P^0; R)$ przekształcenie T może być wyrażone zapomocą funkcyj złożonych

$$x_\nu = g_\nu(\Xi_1(X_{n-m+1}, \dots X_n), \dots \Xi_{n-m}(X_{n-m+1}, \dots X_n), X_{n-m+1}, \dots X_{2n-m})$$

klasy C^p w otoczeniu punktu $(X_{n-m+1}^0, \dots X_n^0, 0, 0, \dots 0)$. (Zmienne $X_1, X_2, \dots X_{n-m}$, które występują w tych funkcjach, są zależne od zmiennych $X_{n-m+1}, \dots X_n$).

29. Jakobian powyższych funkcyj, wzięty w punkcie $(X_{n-m+1}^0, X_{n-m+2}^0, \dots X_n^0, 0, 0, \dots 0)$, wynosi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Xi_1}{\partial X_{n-m+1}}, & \frac{\partial \Xi_2}{\partial X_{n-m+1}}, & \dots & \frac{\partial \Xi_{n-m}}{\partial X_{n-m+1}}, & 1, 0, \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Xi_1}{\partial X_n}, & \frac{\partial \Xi_2}{\partial X_n}, & \dots & \frac{\partial \Xi_{n-m}}{\partial X_n}, & 0, 0, \dots 1 \\ \beta_{1,1}, & \beta_{1,2}, & \dots & \dots & \beta_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-m,1}, & \beta_{n-m,2}, & \dots & \dots & \beta_{n-m,n} \end{vmatrix}$$

gdzie za X_k, $k=1, 2, \dots n\text{-}m$, podstawiono $\Xi_k(X_{n-m+1}, \dots X_n)$ i przyjęto $X_\nu = X_\nu^0$, dla $\nu = n\text{-}m+1, \dots n$, $X_{n+\lambda} = 0$, dla $\lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m$.

Rząd macierzy pierwszych m wierszy wynosi m; wiersze te tworzą m wektorów stycznych do powierzchni $\mathfrak{S}$ w punkcie $(X_1^0, X_2^0, \dots X_n^0)$. Zatem, powołując się na założenie 13 (11) i na nierówności 24, stwierdzamy na podstawie lematu 1, że wyznacznik powyższy jest różny od 0.

30. Wynika stąd odwracalność funkcyj złożonych, określonych w ustępie 28, w dostatecznie małem otoczeniu punktu $(X_{n-m+1}^0, X_{n-m+2}^0, \dots X_n^0, 0, 0, \dots 0)$. Funkcje odwrotne

$$X_\varkappa = \Phi_\varkappa(x_1, x_2, \dots x_n), \qquad \varkappa = n\text{-}m+1, \dots 2n\text{-}m,$$

są klasy C^p i posiadają jakobian różny od zera w otoczeniu n-wymiarowem punktu $(X_1^0, X_2^0, \dots X_n^0)$; macierz

$$\left\| \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu=1,2,\dots n \\ \varkappa=n+1,\ n+2,\dots 2n-m}}$$

jest rzędu $n\text{-}m$ tamże.

31. P^0 oznaczało dowolny punkt zbioru S. Przekształcenie T spełnia założenie 20 twierdzenia VI rozdz. I (zob. 28, 30).

Uwagi zanotowane uprzednio pod 25 i 26, przy zachowaniu oznaczeń O, A, S, pokrywają się z pozostałemi założeniami twierdzenia VI, co pociąga za sobą istnienie takiego zbioru otwartego B w przestrzeni $(2n\text{-}m)$-wymiarowej, że

$$S \subset B \subset O$$

i przekształcenie T zacieśnione do $A \times B$ jest odwracalnem.

Oznaczmy $\mathfrak{B} = T(A \times B)$. Wobec rozważań poprzednich (28, 30) widocznem jest, że zbiór $\mathfrak{B}$ zawiera w sobie n-wymiarową dziedzinę $\mathfrak{D}$, obejmującą powierzchnię $\mathfrak{S}$.

Dziedzina $\mathfrak{D}$ może być tak obrana, aby funkcje

$$X_t = G_t(x_1, x_2, \dots x_n), \quad t = 1, 2, \dots 2n\text{-}m,$$

odwrotne względem funkcyj g_ν (26), były klasy C^p i aby rząd macierzy

$$\left\| \frac{\partial G_t}{\partial x_\nu} \right\|_{\substack{\nu=1,2,\dots n \\ t=n+1,\ n+2,\dots 2n-m}}$$

wynosił n-m we wszystkich punktach $\mathfrak{D}$ (30).

Punkt $(x_1, x_2, \dots x_n)$, należący do $\mathfrak{D}$, należy do $\mathcal{S}$ wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu punkt $(X_1, X_2, \dots X_{2n-m})$ należy do S (26), a więc, gdy

$$F_\lambda(x) = G_{n+\lambda}(x) = X_{n+\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots n\text{-}m.$$

Na tem kończymy dowód twierdzenia X.

32. Równolegle z twierdzeniem X możnaby wypowiedzieć i udowodnić analogiczne twierdzenie dla płatów powierzchniowych fizykalnych a w wypadku $n = m + 1$ także dla analitycznych.

33. Słusznem jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia X. Jeżeli zbiór $\mathcal{S}$ spełnia warunki 14—16, to rozpada się na rodzinę powierzchni regularnych klasy C^p, spełniających warunek N (11)[1].

Założenie 13, że powierzchnia $\mathcal{S}$ spełnia warunek N, staje się zrozumiałem. Każdy płat powierzchniowy, który może być przedstawiony zapomocą funkcyj uwikłanych, spełnia je. Nie wiem jednak, czy założenie to nie może być zastąpione jakiemś innem, skromniejszem.

W wypadku $n = m + 1$ spełnianie warunku N przez powierzchnię $\mathcal{S}$ pokrywa się z dwustronnością tejże w sensie klasycznym[2]).

Zważywszy, że łuki regularne mogą być traktowane przy pomocy twierdzenia VIII rozdz. II, założenie o dwustronności jest wystarczającem we wszystkich wypadkach, dotyczących przestrzeni euklidesowej 2- lub 3-wymiarowej.

34. Korzystając z twierdzenia III, dostrzegamy, że płaty powierzchniowe, czyniące zadość założeniom twierdzenia VII, a także

---

[1]) Twierdzenie klasyczne o funkcjach uwikłanych. Zob. np. E. Goursat, Kurs Analizy, t. I, rozdz. III, l. 40.

[2]) Zob. np. É. Picard, Traité d'analyse, str. 136.

krzywe zamknięte, rozważane w twierdzeniu VIII, muszą spełniać warunki 1—5 i warunek N[1]), wobec czego stosuje się do nich twierdzenie X. Pozostawiłem jednak osobne dowody dla twierdzeń VII i VIII, jako bardziej bezpośrednie i krótsze niż droga okolna poprzez twierdzenie X.

35. Opierając się na definicji R (1—5), możnaby również wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie podobne do twierdzenia IX (rozdz. II) i pokazać, że m-wymiarowa powierzchnia regularna $\mathfrak{S}$, zawarta w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej i spełniająca warunek N (11), jest zanurzona w $(n\text{-}m)$-parametrowej rodzinie regularnych powierzchni m-wymiarowych, izotopowych z powierzchnią $\mathfrak{S}$.

36. Ograniczymy się obecnie do badania wypadku $n = m + 1$. Funkcje uwikłane, przedstawiające dany płat powierzchniowy, otrzymane z twierdzeń VII, VIII rozdziału II, lub z twierdzenia X, są określone w pewnej dziedzinie, którą naogół nie może być jakaś dziedzina *zgóry* zadana. Tkwi to częściowo w samem zagadnieniu. Chcąc np. zbudować równanie koła K w postaci

$$F(x, y) = 0,$$

gdzie F ma być funkcją klasy C^p w całej płaszczyźnie (x, y), spełniającą wszędzie nierówność

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \neq 0,$$

natrafimy na trudność, której nie będzie można ominąć. Mianowicie funkcja $F(x, y)$ musi posiadać conajmniej jedno ekstremum wewnątrz koła K, a temsamem pochodne muszą się zerować równocześnie lub któraś z nich traci sens w pewnym punkcie wnętrza koła K.

37. Trudności tej unikniemy, zastępując ostatnią nierówność warunkiem mniej krępującym, którego użył p. prof. W. Wilkosz w swej pracy p. t. „O pewnym problemie integralnym z teorji funkcyj uwikłanych“ [2]).

Udowodnił on mianowicie, że jeżeli $\mathfrak{D}$ jest dziedziną ograniczoną, położoną w przestrzeni dwu-wymiarowej; $F(x, y)$ jest funkcją określoną i ciągłą w dziedzinie $\mathfrak{D}$ wraz z jej brzegiem, a funkcją klasy C^p w $\mathfrak{D}$;

---

[1]) Porównaj 11, rozdz. II.

[2]) Biuletyn Polskiej Akademji Umiejętności, 1920, str. 73—87.

$$|F| + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \neq 0 \quad \text{w } \mathfrak{D};$$
$$F \neq 0 \qquad \text{na brzegu } \mathfrak{D};$$

istnieje w $\mathfrak{D}$ punkt (x, y) o własności $F(x, y) = 0$; jeżeli ponadto przez $\mathcal{S}$ oznaczymy zbiór punktów (x, y) dziedziny $\mathfrak{D}$, dla których

$$F(x, y) = 0,$$

to zbiór $\mathcal{S}$ składa się ze skończonej ilości krzywych Jordana, bez punktów wspólnych, różniczkowalnych i o ciągłych pierwszych pochodnych; krzywe te dzielą dziedzinę $\mathfrak{D}$ na skończoną ilość dziedzin $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots \mathfrak{D}_p$ o tej własności, że wewnątrz każdej dziedziny $\mathfrak{D}_i$ funkcja $F(x, y)$ jest stałego znaku i jeżeli dziedziny $\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_k$, $(i \neq k)$ mają wspólne punkty graniczne, to $F(x, y)$ ma w tych dwóch dziedzinach znaki przeciwne.

P. prof. W. Wilkosz rozszerzył następnie, w wykładzie na posiedzeniu Pol. Tow. Mat. 11 XII 1926 [1]), twierdzenie to na wypadek większej ilości wymiarów. Występujące w twierdzeniu powierzchnie zamknięte okazały się powierzchniami zamkniętemi nietylko wedle definicji Amesa lecz i w ujęciu Brouwera. Na końcu tej pracy podam twierdzenie poniekąd odwrotne (wn. z tw. XII).

Przedtem jednak wypowiemy:

38. **Twierdzenie XI.** *Jeżeli $\mathfrak{R}$ jest dziedziną przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej, $\mathcal{S}$ powierzchnią regularną klasy C^p, $p \geqslant 1$, $(n-1)$-wymiarową, zawartą w $\mathfrak{R}$ i rozcinającą $\mathfrak{R}$ na dwie dziedziny, to istnieje taka funkcja $G(x)$, określona i posiadająca pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p włącznie w dziedzinie $\mathfrak{R}$, że*

$$|G(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial G}{\partial x_\nu}\right| \neq 0$$

w każdym punkcie $\mathfrak{R}$, oraz zbiór punktów x dziedziny $\mathfrak{R}$ spełniających równanie

$$G(x) = 0$$

jest identyczny z $\mathcal{S}$.

39. **Lemat 2.** Przy założeniach twierdzenia XI, w każdym punkcie x powierzchni $\mathcal{S}$ może być określony wektor jednostkowy normalny tak, aby był ciągły w zależności od punktu x, poruszającego się po powierzchni $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ jest powierzchnią dwustronną).

---

[1]) Ann. de la Société Polonaise de Math. t. VI, str. 117.

40. **Dowód.** W każdym punkcie x powierzchni S istnieje wektor jednostkowy normalny $\bar{n}(x)$, nieoznaczony jedynie co do zwrotu. Twierdzę, że jeżeli wybierzemy jeden z dwu możliwych zwrotów tego wektora w pewnym punkcie x^0 powierzchni S, to wektor jednostkowy normalny będzie już wyznaczony na całej powierzchni S przez warunek, aby był ciągły.

41. W dostatecznie małem otoczeniu $o(x^0; r)$ punktu x^0 jedna ze spółrzędnych punktu $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ powierzchni S może być wyrażona przy pomocy pozostałych n-1 spółrzędnych (zob. 8).

Bez uszczerbku dla ogólności możemy przyjąć:

$$x_1 = \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n),$$

gdzie funkcja φ jest określona w $o(x_2^0, x_3^0, \ldots x_n^0; \varrho)$.

Spółrzędnemi wektora jednostkowego, normalnego do S w punkcie x, należącym do $o(x^0; r)$, będą wielkości

$$-\alpha,\ \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$

gdzie

$$\frac{1}{\alpha} = \varepsilon\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^2}, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Z warunku ciągłości wynika, że ε musi być stałe w $o(x^0; r)$.

Ale obrany poprzednio kierunek wektora jednostkowego, normalnego w punkcie x^0, wyznacza znak liczby ε w punkcie x^0 a więc i w całem otoczeniu $o(x^0; r)$.

42. Dowolny punkt x powierzchni S może być, wobec założenia o spójności powierzchni regularnych (zob. 6), połączony z punktem x^0 torem ciągłym, leżącym na S. Tor ten może być pokryty, na podstawie twierdzenia Heine-Borela, skończoną ilością n-wymiarowych kul o następującej własności: jeżeli w dowolnym punkcie płata S, należącym do takiej kuli, określono wektor jednostkowy normalny, to z założenia ciągłości wektor ten jest już wyznaczony jednoznacznie w tej części powierzchni S, która leży w rozważanej kuli.

Posuwając się po torze od kuli do kuli, dojdziemy, po skończonej ilości kroków, do wyznaczenia zwrotu wektora jednostkowego normalnego w punkcie x. Zachodzi obawa, czy posuwając się po innym torze, nie otrzymamy przeciwnego zwrotu wektora jednostkowego normalnego. Nietrudno udowodnić, że gdyby się to zdarzyło, to byłoby słusznem zdanie następujące:

43. Jeżeli x^1, x^2 są dowolnemi punktami powierzchni $\mathfrak{S}$ i jeżeli odcinki $x^1 y^1$, $x^2 y^2$, leżące na prostych normalnych do powierzchni $\mathfrak{S}$ w punktach x^1 i x^2, nie wychodzą poza dziedzinę $\mathfrak{R}$, to można połączyć punkt y^1 z punktem y^2 torem ciągłym, wewnątrz $\mathfrak{R}$, nie przebijając powierzchni $\mathfrak{S}$.

44. Przypuśćmy, że zdanie to jest prawdziwem. Weźmy dwa dowolne punkty z^1 i z^2 dziedziny $\mathfrak{R}$, nie należące do $\mathfrak{S}$, i połączmy punkt z^1 z punktem z^2 torem ciągłym $\mathfrak{l}$. Wykażemy, że istnieje w $\mathfrak{R}$ tor ciągły $\mathfrak{l}'$ od z^1 do z^2, który nie natrafia na $\mathfrak{S}$. Dojdziemy w ten sposób do sprzeczności z założeniem, że $\mathfrak{S}$ rozcina $\mathfrak{R}$, i dowód będzie ukończony (38).

45. Jeżeli $\mathfrak{l}$ posiada punkty wspólne z powierzchnią $\mathfrak{S}$, to niechaj x^1 oznacza pierwszy, x^2 ostatni, gdy poruszamy się po torze od z^1 do z^2. ($\mathfrak{S}$ powstaje z dziedziny $\mathfrak{R}$ przez odrzucenie dwu dziedzin, zał. 38, jest więc zbiorem domkniętym względem $\mathfrak{R}$). Zmieńmy układ spółrzędnych $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ tak, aby punkt x^1 przeszedł w początek, a wektor normalny do $\mathfrak{S}$ w punkcie x^1 w wektor równoległy do pierwszej osi nowego układu. Dla prostoty pozostawimy dla nowych zmiennych oznaczenia starych.

Można z łatwością dowieść, że istnieje n-wymiarowa kostka k domknięta

$$|x_\nu| \leqq q, \qquad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

zawarta w $\mathfrak{R}$, o tej własności, że część powierzchni $\mathfrak{S}$, zawarta w k, może być przedstawiona równaniem

$$x_1 = \psi(x_2, x_3, \ldots x_n), \qquad |x_\nu| \leqq q, \qquad \nu = 2, 3, \ldots n,$$

oraz że

$$|\psi(x_2, x_3, \ldots x_n)| < q, \qquad \text{dla } |x_\nu| \leqq q, \qquad \nu = 2, 3, \ldots n.$$

Posuwając się po torze $\mathfrak{l}$ od punktu z^1 do punktu x^1, natrafimy po drodze na jakiś punkt $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ ograniczenia kostki k.

Będzie $$u_1 > \psi(u_2, u_3, \ldots u_n) \text{ lub}$$
$$u_1 < \psi(u_2, u_3, \ldots u_n).$$

Przyjmijmy np. że zachodzi nierówność pierwsza. Połączmy punkt $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ z punktem $(q, u_2, \ldots u_n)$ odcinkiem (który może redukować się do punktu); na odcinku tym nie będzie punktów powierzchni $\mathfrak{S}$. Następnie połączmy punkt $(q, u_2, \ldots u_n)$ z punktem $y^1 = (q, 0, \ldots 0)$ odcinkiem, który również nie natrafi na $\mathfrak{S}$. Zdołaliśmy zbudować tor ciągły $\mathfrak{l}^1$, leżący w $\mathfrak{R}$, nie zawadzający o $\mathfrak{S}$,

łączący z^1 z punktem y^1 normalnej do powierzchni $\mathcal{S}$ o spodku x^1. Odcinek $x^1 y^1$ jest zawarty w $\mathcal{R}$.

Zupełnie podobnym sposobem prowadzimy w $\mathcal{R}-\mathcal{S}$ od jakiegoś punktu y^2 normalnej do $\mathcal{S}$, wystawionej w punkcie x^2, tor ciągły l^2 do punktu z^2; przyczem odcinek $x^2 y^2$ będzie leżał w $\mathcal{R}$. Skoro przyjęliśmy za słuszne zdanie 43, to prawdą jest, że możemy także od y^1 do y^2 dojść wewnątrz $\mathcal{R}$ po torze ciągłym, powiedzmy l^0, z ominięciem $\mathcal{S}$. Kładąc $l' = l^1 + l^0 + l^2$, kończymy dowód lematu.

46. **Dowód twierdzenia XI.** $\mathcal{S}$ jest powierzchnią regularną klasy C^p (38), a wobec lematu 2 spełnia warunek N. Z twierdzenia X (12) wynika, że powierzchnia $\mathcal{S}$ jest zbiorem punktów x spełniających równanie

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

którego lewa strona jest funkcją klasy C^p w pewnej dziedzinie $\mathfrak{D}$ i czyni tamże zadość nierównościom

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \right| \neq 0.$$

47. Zacieśnijmy dziedzinę $\mathfrak{D}$ tak, aby była zawartą w $\mathcal{R}$, obejmowała $\mathcal{S}$, i aby funkcja $F(x)$ była określoną także w otoczeniu każdego z pośród tych punktów brzegu $\mathfrak{D}$, które należą do $\mathcal{R}$.

48. W myśl założenia (38) $\mathcal{S}$ rozcina dziedzinę $\mathcal{R}$ na dwie dziedziny $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$.

Oznaczmy:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D} \times \mathcal{R}_1,$$
$$\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D} \times \mathcal{R}_2.$$

Będzie: $\mathfrak{D}_1 \subset \mathcal{R}_1$, $\mathfrak{D}_2 \subset \mathcal{R}_2$.

Zbiory $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ są niepuste. Bowiem tor, idący od dowolnego punktu zbioru $\mathcal{R}_1$ do dowolnego punktu zbioru $\mathcal{R}_2$, lub przeciwnie, zanim natrafi na powierzchnię $\mathcal{S}$, musi przejść przez punkty dziedziny $\mathfrak{D}$.

49. Przypuśćmy, że założenia zostały tak dobrane, aby funkcja $F(x)$ przyjęła, przynajmniej raz, wartość dodatnią w jakimś punkcie zbioru $\mathfrak{D}_1$.

Nietrudno dowieść (podobnie jak lematu 2), że każde dwa punkty zbioru $\mathfrak{D} - \mathcal{S}$, w których funkcja $F(x)$ jest tego samego znaku, mogą być połączone w $\mathfrak{D}-\mathcal{S}$ torem ciągłym, z ominięciem powierzchni $\mathcal{S}$.

Stąd:
$$F(x) > 0 \text{ w } \mathfrak{D}_1,$$
$$F(x) < 0 \text{ w } \mathfrak{D}_2.$$

50. Zbiór $\mathfrak{S} = \mathfrak{R} - (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)$ jest domknięty względem $\mathfrak{R}$. Na mocy twierdzenia I rozdz. I (zob. 47) istnieje taka funkcja $\vartheta(x)$, fizykalna w $\mathfrak{R}$, że

$$\vartheta(x) = 0 \quad \text{w } \mathfrak{S},$$
$$\vartheta(x) = 1 \quad \text{w } \mathfrak{R} - \mathfrak{D},$$
$$0 \leqslant \vartheta(x) \leqslant 1 \quad \text{w } \mathfrak{R},$$

pochodne cząstkowe wszystkich rzędów funkcji $\vartheta(x)$ zerują się w $\mathfrak{S}$ i w $\mathfrak{R} - \mathfrak{D}$.

Dla ukończenia dowodu wystarczy przyjąć (zob. 46, 47, 49):

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + \vartheta(x)(1 - F(x)) & \text{dla } x \text{ należącego do } \mathfrak{D}_1, \\ F(x) + \vartheta(x)(-1 - F(x)) & \text{dla } x \text{ należącego do } \mathfrak{D}_2, \\ 0 & \text{w } \mathfrak{S}, \\ 1 & \text{w } \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{D}_1, \\ -1 & \text{w } \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{D}_2. \end{cases}$$

51. **Twierdzenie XII.** *Jeżeli $\mathfrak{R}$ jest dziedziną położoną w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej a $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, są powierzchniami regularnemi klasy C^p, $p \geqslant 1$, $(n\text{-}1)$-wymiarowemi, zawartemi w $\mathfrak{R}$, z których każda rozcina $\mathfrak{R}$ na dwie dziedziny i jeżeli dwie różne powierzchnie $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_j$ nie mają nigdy punktów wspólnych, oraz jeżeli każdemu punktowi dziedziny $\mathfrak{R}$ odpowiada otoczenie, w którem znajdować się mogą punkty jednej tylko powierzchni $\mathfrak{S}_i$, to istnieje taka funkcja $G(x)$ określona i posiadająca pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu p włącznie w dziedzinie $\mathfrak{R}$, że*

$$|G(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial G}{\partial x_\nu} \right| \neq 0$$

we wszystkich punktach dziedziny $\mathfrak{R}$ a zbiór punktów x dziedziny $\mathfrak{D}$, spełniających równanie $G(x) = 0$, jest identyczny ze zbiorem $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{S}_i$.

52. **Dowód.** Otoczymy każdą z powierzchni $\mathfrak{S}_i$ dziedziną $\mathfrak{R}_i$, zawartą w $\mathfrak{R}$. Dziedziny $\mathfrak{R}_i$ mogą być tak dobrane, aby żadne dwie z nich nie miały punktów wspólnych i aby odległość dowolnego punktu dziedziny $\mathfrak{R}_i$ od powierzchni $\mathfrak{S}_i$ nie przekraczała $\frac{1}{i}$.

53. Obierzemy w $\mathfrak{R}$ punkt x^0, leżący poza dziedzinami $\mathfrak{R}_i$. Wracając do dowodu twierdzenia XI (50), stwierdzimy, że dla każdej powierzchni $\mathfrak{S}_i$ można zbudować funkcję $H_i(x)$ klasy C^p w dziedzinie $\mathfrak{R}$, spełniającą następujące warunki:

$$\begin{array}{ll} |H_i(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial H_i(x)}{\partial x_\nu} \right| \neq 0 & \text{w } \mathfrak{R}, \\ H_i(x) = 0 & \text{w } \mathfrak{S}_i \text{ i tylko w } \mathfrak{S}_i, \\ -1 \leqslant H_i(x) \leqslant +1 & \text{w } \mathfrak{R}_i, \\ |H_i(x)| = 1 & \text{poza } \mathfrak{R}_i, \\ H_i(x^0) = +1. & \end{array}$$

54. Przyjmijmy $$G(x) = \prod_{i=1}^{\infty} H_i(x).$$

Niech Q będzie dziedziną domkniętą, ograniczoną, zawartą w $\mathfrak{R}$ i obejmującą punkt x^0. Począwszy od pewnego i' funkcje

$$H_i(x) \equiv +1 \quad \text{wewnątrz } Q,$$

w przeciwnym bowiem razie istniałby w Q punkt zagęszczenia rodziny powierzchni $\mathfrak{S}_i$ (52, 53), co sprzeczne z założeniem.

W dowolnym zatem punkcie dziedziny Q iloczyn $\prod_{i=1}^{\infty} H_i(x)$ redukuje się do iloczynu skończonego. Funkcja $G(x)$ jest określona i klasy C^p wewnątrz Q. Z łatwością upewnimy się, że $G(x)$ spełnia nierówność

$$|G(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial G(x)}{\partial x_\nu} \right| \neq 0 \quad \text{wewnątrz } Q$$

i zeruje się tylko w punktach należących do $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{S}_i$ (52, 53).

Rezultaty ostatnie odnoszą się nietylko do Q, ale do całej dziedziny $\mathfrak{R}$, ponieważ dziedzina Q, obejmująca x^0, domknięta i ograniczona, była pozatem zupełnie dowolną.

55. **Wniosek z twierdzenia XII.** *Jeżeli $\mathfrak{R}$ jest dziedziną położoną w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej a $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, są powierzchniami regularnemi klasy C_p, $p \geqslant 1$, $(n-1)$-wymiarowemi, jeżeli dwie różne powierzchnie $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_j$ nie mają nigdy punktów wspólnych, oraz jeżeli każdemu punktowi dziedziny $\mathfrak{R}$ odpowiada otoczenie, w którem znajdować się mogą punkty jednej tylko powierzchni $\mathfrak{S}_i$,*

i jeżeli w końcu założymy, że $\mathcal{S}_i$ *są zamkniętemi powierzchniami w sensie Jordana, to istnieje taka funkcja* $G(x)$ *określona i posiadająca pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu* p *włącznie w dziedzinie* $\mathcal{R}$, *że*

$$|G(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial G}{\partial x_\nu} \right| \neq 0$$

we wszystkich punktach dziedziny $\mathcal{R}$ *a równanie*

$$G(x) = 0$$

wyznacza zbiór punktów $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i$.

Dostajemy tu odwrócenie twierdzenia p. prof. W. Wilkosza l. 37. Dla dowodu należy zauważyć, że każda z powierzchni $\mathcal{S}_i$, jako powierzchnia Jordana, rozcina dziedzinę $\mathcal{R}$ na dwie dziedziny.

56. Twierdzenia analogiczne do XI i XII zachodzą także dla regularnych powierzchni fizykalnych.

